E.S.E.O.-E.S.T.I.T.-H.E.I.-I.C.A.M.-I.C.P.I.-I.S.E.N.-I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS 1986

SERIE P DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Durée 4 heures

I. On considère l'équation différentielle : $x\,y'(x)+(1-x)\,y(x)-1=0$
où $x\in\mathbb{R}$ et y est la fonction inconnue, supposée dérivable.

1°) **Résoudre (E) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.**

2°) **Montrer que (E) admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution, que l'on notera f.**

3°) **Montrer que f est développable en série entière en 0; déterminer ce développement en série entière, et son rayon de convergence.**

4°) **Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.**

5°) On note $g: x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Déterminer le developpement en série entière de g.

6°) Etudier les variations de g. Etudier l'existence de limites pour g en $-\infty$ et en $+\infty$. Tracer la courbe représentative de g.

II. Soient $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que :

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R} \quad x[F(x)]^2=2[F(2x)-F(x)] \\ F(0)=1 \end{cases}$$

et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \varphi(x)=1+xF(x)$

1°) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad [\varphi(2x)]=[\varphi(x)]^2$.

2°) Etudier l'application: $x \longmapsto \frac{1}{x}\,\mathrm{Ln}(\varphi(x))$,

Ln désignant la fonction logarithme népérien.

3°) En déduire l'expression de φ puis celle de F.

III. 1°) Montrer que la somme h de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)^2(n!)}$

est définie sur $\mathbb{R}$, et exprimer h à l'aide de g (définie en I 5°).

2°) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $u_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2(k!)}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{(n^3)(n!)}$.

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers h(1), et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n<h(1)<v_n$.

b) Donner, en justifiant, une valeur décimale approchée de h(1) à 10^{-10} près.

IV. Pour $\lambda\in]0,\frac{1}{2}[$, on considère l'équation : (E_λ) $x=\lambda f(x)$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ (f étant définie dans la partie I).

1°) On note $A_\lambda : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2-\lambda(e^x-1)$. Etudier les variations de A_λ.

2°) En déduire le nombre de solutions de (E_λ).

3°) On note α_λ et β_λ les deux solutions de (E_λ), avec $\alpha_\lambda<\beta_\lambda$. Démontrer que, quand λ tend vers 0, α_λ tend vers 0 et β_λ tend vers $+\infty$. Prouver que α_λ est équivalent à λ quand λ tend vers 0.

Note d'édition: pour des raisons techniques ce texte n'est pas la reproduction de celui distribué aux candidats, mais une reconstitution. Il est donc donné sous toutes réserves.